ペレリマン数

参考文献：

「天に向かって続く数」

加藤文元，中井保行，日本評論社，2016

はじめに

皆さんにとって，

「数」

って何ですか？

ある著名な数学者は，

「数とは，<u>計算できる</u>
<u>記号</u>のことである。」

と言いました。

このスライドで紹介する
「ペレリマン数」は，
皆さんが知っているような
「数」ではないので，

「<u>こんな数を考えていいの？</u>」と
感じるかもしれません。

しかし，「ペレリマン数」は，

「<u>計算できる記号である</u>」

という意味で，

確かに「数」なのです。

「ペレリマン数」とは？

すごくおおざっぱに言うと，

2次方程式 $x^2 = x$ の解

のことです。

厳密なことは，
のちほど説明します。

2次方程式 $x^2 = x$ の解の個数は？

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$\therefore \quad \underline{x = 0, 1}$$

解は
２個だけ？

１ケタの整数の２乗

０×０ ＝ ０

１×１ ＝ １

４×４ ＝１６

５×５ ＝２５

６×６ ＝３６

７×７ ＝４９

８×８ ＝６４

９×９ ＝８１

$x^2 = x$ を満たすのは
この２個だけ？

1ケタの整数の2乗

0×0 ＝ 0	5×5 ＝ 5
1×1 ＝ 1	6×6 ＝ 6
2×2 ＝ 4	7×7 ＝ 9
3×3 ＝	
4×4 ＝	

十の位を隠すと，
「x＝5」と「x＝6」も
方程式　$x^2=x$　を満たす
ように見える！

「$5 \times 5 = 5$」？

「$6 \times 6 = 6$」？

「$x = 5$ と $x = 6$ も方程式 $x^2 = x$ の解」？

・５×５は「５×５＝２５」であり，
「５×５＝５」ではありません。

・６×６は「６×６＝３６」であり，
「６×６＝６」ではありません。

つまり，「５」も「６」も，
方程式 $x^2 = x$ の解ではないので，
「ペレリマン数」ではありません。

ところで，「一の位が6である整数」を2乗すると，必ず一の位が6になります。

なぜだかわかりますか？

理由はともかく，
「2ケタの整数」で，
実際に試してみましょう。

一の位が６である
２ケタの整数の２乗

06×06＝36	56×56＝3136
16×16＝256	66×66＝4356
26×26＝676	76×76＝5776
36×36＝1296	86×86＝7396
46×46＝2116	96×96＝9216

一の位が6である
2ケタの整数の2乗

06×06＝	6		56×56＝	6
16×16＝	6		66×66＝	6
	6		76×76＝	6
	6		86×86＝	6
	6		96×96＝	6

一の位は
すべて６に
なっている

一の位が6である
2ケタの整数の2乗

千の位と百の位を隠すと，「x＝76」も
$x^2 = x$ を満たす
ように見える！

46×46＝　16

56×56＝　36
66×66＝　56
76×76＝　76
86×86＝　96
96×96＝　16

「下２ケタが７６である整数」を２乗すると，必ず下２ケタが７６になります。

なぜだかわかりますか？

理由はともかく，
「３ケタの整数」で，
実際に試してみましょう。

下２ケタが７６である３ケタの整数の２乗

０７６×０７６＝　　５７７６
１７６×１７６＝　３０９７６
２７６×２７６＝　７６１７６
３７６×３７６＝１４１３７６
４７６×４７６＝２２６５７６
５７６×５７６＝３３１７７６
６７６×６７６＝４５６９７６

下2ケタが76である3ケタの整数の2乗

076×076＝ 76
176×176＝ 76
276×276＝ 76
3 76
4 76
5 76
676×676＝ 76

下2ケタは
すべて76に
なっている

下2ケタが76である3ケタの整数の2乗

076×076＝ 776

176×176＝ 976

276×276＝ 176

376×376＝ 376

476×476＝ 76

下3ケタに注目すると，「x＝376」も
方程式　$x^2=x$　を満たすように見える！

676×676＝ 976

0376×0376＝　1376

1376×1376＝　3376

同様に，4ケタの場合を考えてみると……

5376×5376＝　1376

下4ケタに注目すると，「x＝9376」も方程式 $x^2 = x$ を満たすように見える！

8376×8376＝　7[illegible]76

9376×9376＝　9376

09376×09376＝　09376

19376×19376＝　29376

下5ケタに注目すると，「x＝09376」も
方程式　$x^2 = x$　を満たすように見える！

49376×49376＝　89376

59376×59376＝　09376

69376×69376＝　29376

同様に，5ケタの場合を
考えてみると……

009376×009376＝　909376

109376×109376＝　109376

209376×209376＝

下6ケタに注目すると，「x＝109376」も方程式　$x^2 = x$　を満たすように見える！

509376×509376＝　909376

609376×609376＝　109376

309376

509376

709376

同様に，6ケタの場合を考えてみると……

ここからは，結果のみ
縦書きの計算で示します。

$$
\begin{array}{r}
7109376 \\
\times \quad 7109376 \\
\hline
7109376
\end{array}
$$

８ケタの場合

$$
\begin{array}{r}
87109376 \\
\times \quad 87109376 \\
\hline
87109376
\end{array}
$$

この作業を
延々と続けていくと，……
無限に左に延ばせる！

$$
\begin{array}{r}
\cdots\cdots 37400081787109376 \\
\times\ \cdots\cdots 37400081787109376 \\
\hline
\cdots\cdots 37400081787109376
\end{array}
$$

この数は

$x^2 = x$ を

満たしている！

このようにして作り出した数

……374008178710937 6

が，「ペレリマン数」である。

「ペレリマン数」って他にもあるの？

今度は，「一の位が5」から考察を始めてみよう。

1ケタの場合

$$
\begin{array}{r}
5 \\
\times \quad 5 \\
\hline
5
\end{array}
$$

2ケタの場合

$$
\begin{array}{r}
25 \\
\times \quad 25 \\
\hline
25
\end{array}
$$

3ケタの場合

$$
\begin{array}{r}
6\,2\,5 \\
\times \qquad\qquad 6\,2\,5 \\
\hline
6\,2\,5
\end{array}
$$

4ケタの場合

$$
\begin{array}{r}
0625 \\
\times \quad 0625 \\
\hline
0625
\end{array}
$$

5ケタの場合

$$
\begin{array}{r}
90625 \\
\times \quad 90625 \\
\hline
90625
\end{array}
$$

6ケタの場合

$$\begin{array}{lr} & 890625 \\ \times & 890625 \\ \hline & 890625 \end{array}$$

この作業を
延々と続けていくと，……
無限に左に延ばせる！

$$
\begin{array}{r}
\cdots\cdots 6259918212890625 \\
\times\ \cdots\cdots 6259918212890625 \\
\hline
\cdots\cdots 6259918212890625
\end{array}
$$

この数も

$x^2 = x$ を

満たしている！

このようにして作り出した数

……625991821289０625

も,「ペレリマン数」である。

「ペレリマン数」って
もっともっと
たくさんあるの？

1ケタの整数の2乗

0×0 ＝ 0	5×5 ＝ 5
1×1 ＝ 1	6×6 ＝ 6
2×2 ＝ 4	7×7 ＝ 9
3×3 ＝ 9	8×8 ＝ 4
4×	

では，「一の位が0」，「一の位が1」から
考察を始めると，どうなるでしょう？

「一の位が1」の場合は……

$$
\begin{array}{rr}
 & \cdots\cdots 000000000001 \\
\times & \cdots\cdots 000000000001 \\
\hline
 & \cdots\cdots 000000000001
\end{array}
$$

「一の位が0」の場合は……

　……000000000000

× ……000000000000

　……000000000000

- 「一の位が6」から始めて求めた

P＝ ……3740081787109376

- 「一の位が5」から始めて求めた

Q＝ ……6259918212890625

- 「一の位が1」から始めて求めた

1＝ ……00000001

ただの「1」

- 「一の位が0」から始めて求めた

0＝ ……00000000

ただの「0」

「ペレリマン数」の性質

Ｐ＝……81787109376 と

Ｑ＝……18212890625 の

・和　Ｐ＋Ｑ

・積　Ｐ×Ｑ

・差　Ｐ－Ｑ，Ｑ－Ｐ

などを考えると，

面白い結果が得られます。

Ｐ＝……81787109376 に
Ｑ＝……18212890625 を
足してみると……

$$
\begin{array}{r}
\cdots\cdots 3740081787109376 \\
+\ \cdots\cdots 6259918212890625 \\
\hline
\cdots\cdots 0000000000000001
\end{array}
$$

Ｐ＝……81787109376 に
Ｑ＝……18212890625 を
掛けてみると……

$$
\begin{array}{r}
\cdots\cdots 3740081787109376 \\
\times\ \cdots\cdots 6259918212890625 \\
\hline
\cdots\cdots 0000000000000000
\end{array}
$$

Ｐ＝……81787109376 から
Ｑ＝……18212890625 を引くと
Ｐ－Ｑ＝……7480163574218751,
これを２乗すると……

$$
\begin{array}{rr}
 & \cdots\cdots 7480163574218751 \\
\times & \cdots\cdots 7480163574218751 \\
\hline
 & \cdots\cdots 0000000000000001
\end{array}
$$

Ｑ＝……18212890625 から
Ｐ＝……81787109376 を引くと
Ｑ－Ｐ＝……251983642578124 9,
これを２乗すると……

$$
\begin{array}{r}
\cdots\cdots 2519836425781249 \\
\times\ \cdots\cdots 2519836425781249 \\
\hline
\cdots\cdots 0000000000000001
\end{array}
$$

ここまでの「まとめ」①

- 方程式 $x^2 = x$ の解は次の４つ；

$$P = \cdots\cdots 81787109376$$
$$Q = \cdots\cdots 18212890625$$
$$1 = \cdots\cdots 00000000001$$
$$0 = \cdots\cdots 00000000000$$

ここまでの「まとめ」②

- ペレリマン数Ｐ，Ｑには次のような性質がある；

$$P+Q = \cdots\cdots 0000001 = 1$$

$$P\times Q = \cdots\cdots 0000000 = 0$$

$$(P-Q)^2 = \cdots\cdots 0000001 = 1$$

$$(Q-P)^2 = \cdots\cdots 0000001 = 1$$

2次方程式 $x^2=1$ の解の個数は？

$$1^2=(\cdots\cdots 00000001)^2=1$$

$$(P-Q)^2=(\cdots\cdots 74218751)^2=1$$

$$(Q-P)^2=(\cdots\cdots 25781249)^2=1$$

解は，$x=1$，P-Q，Q-P の3個かな？

$$
\begin{array}{r}
\cdots\cdots 9999999999999999 \\
\times\ \cdots\cdots 9999999999999999 \\
\hline
\cdots\cdots 0000000000000001
\end{array}
$$

ごらんの通り，
$x = \cdots\cdots 99999999999$ も
方程式 $x^2 = 1$ の解です！

Ｐ－Ｑ＝……63574218751 に
……9999999999 を
掛けてみると……

$$
\begin{array}{rr}
 & \cdots\cdots 7480163574218751 \\
\times & \cdots\cdots 9999999999999999 \\
\hline
 & \cdots\cdots 2519836425781249
\end{array}
$$

ご参考

Ｑ－Ｐ＝
……2519836425781249

Ｑ－Ｐ＝……36425781249 に
……9999999999 を
掛けてみると……

……2519836425781249
× ……9999999999999999

……7480163574218751

ご参考

Ｐ－Ｑ＝
……7480163574218751

$(P-Q)\times(\cdots9999999999)$
$=Q-P$ で……

$(Q-P)\times(\cdots9999999999)$
$=P-Q$ ということは……

つまり，
$\cdots\cdots9999999999=-1$
っていうこと！

……99999999999 ＝ −1
であることは，次の説明の方がわかりやすいでしょう。

$$
\begin{array}{rr}
 & \cdots\cdots 9999999999999999 \\
+ & \cdots\cdots 0000000000000001 \\
\hline
 & \cdots\cdots 0000000000000000
\end{array}
$$

ここまでの「まとめ」③

- 方程式　$x^2=1$　の解は次の４つ；

$$1 = \cdots\cdots 0000000001$$

$$P-Q = \cdots\cdots 6357421875 1$$

$$Q-P = \cdots\cdots 3642578124 9$$

$$-1 = \cdots\cdots 9999999999 9$$

おわりに

このスライドで紹介した
「ペレリマン数」は，
皆さんが知っているような
「数」ではなかったので，
「こんな数を考えていいの？」と
感じたかもしれません。

しかし，「ペレリマン数」は，
「計算できる記号である」
という意味で，

確かに「数」なのです。

製作：参拾萬数学工房

www.300000.net