補足プリント 1

「3 つの事象の独立」について

このプリントは補足プリント 2 とセットです。「事象の独立」と「確率変数の独立」は似て非なる概念なので，明確に区別して理解する必要があります。

3 つの事象の独立について

3 つの事象 A,B,C に対する，次の 4 つの関係式を考える。

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \ \cdots ①$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \ \cdots ②$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \ \cdots ③$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \ \cdots ㊉$$

- ①が成り立つことを，「2 つの事象 A,B は **（互いに）独立**である」という。
- ②が成り立つことを，「2 つの事象 A,C は **（互いに）独立**である」という。
- ③が成り立つことを，「2 つの事象 B,C は **（互いに）独立**である」という。
- ①②③がすべて成り立つことを，「3 つの事象 A,B,C は**対ごとに独立**である」，「3 つの事象 A,B,C は**ペア独立**である」などという。
- ①②③に加えて㊉式も成り立つことを，「3 つの事象 A,B,C は**相互独立**である」という。

【誤解其の一】 ①②③がすべて成り立つとき，㊉も必ず成り立つ？ → **No!**
【誤解其の二】 ㊉が成り立つとき，①②③も必ずすべて成り立つ？ → **No!**

「3 つの事象 A,B,C は互いに独立である」という表現には曖昧さを含む。

もし仮に，問題集やテストの問題文中に「3 つの事象 A,B,C は互いに独立である」という表現が出てきた場合は，**対ごとに独立（ペア独立）**という意味なのか，それとも**相互独立**という意味なのか，（つまり㊉が成り立つと仮定して良いのか否か，）よく確認すべきである。

【誤解其の一】の反例 （①②③を満たすが㊟を満たさない例）

コイントスを 2 回行うとき，全事象は { 表表, 表裏, 裏表, 裏裏 } の 4 通りで、それぞれの起こる確率は $\dfrac{1}{4}$ である。

- 1 回目が表である事象 { 表表, 表裏 } を A
- 2 回目が表である事象 { 表表, 裏表 } を B
- 1 回目と 2 回目が同じである事象 { 表表, 裏裏 } を C

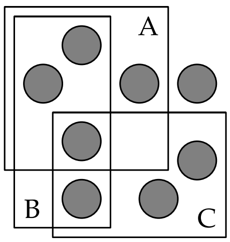
とするとき，$A \cap B = A \cap C = B \cap C =$ { 表表 } であり，

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}, \qquad P(A \cap C) = \frac{1}{4}, \qquad P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

であるから，①②③を満たしている。（つまり，A と B は互いに独立，A と C は互いに独立，B と C は互いに独立である。）しかしながら，$A \cap B \cap C =$ { 表表 } であり，$P(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{4}$ であるから，㊟式を満たしていない。

【誤解其の二】の反例 （㊟を満たすが①②を満たさない例）

次のような例を考える。



$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} \qquad P(\overline{A} \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$$
$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = \frac{2}{8} \qquad P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) = 0$$
$$P(A \cap \overline{B} \cap C) = 0 \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = \frac{2}{8}$$
$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{1}{8} \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{1}{8}$$

このとき，

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であり，同様にして $P(B) = \dfrac{1}{2}$，$P(C) = \dfrac{1}{2}$ もわかるので，㊟式を満たしている。

しかしながら，

$$P(A \cap B) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap \overline{C}) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

であり，①式を満たしていない。同様に

$$P(A \cap C) = P(A \cap B \cap C) + P(A \cap \overline{B} \cap C) = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}$$

であり，②式も満たしていない。（③式はたまたま満たしている。）

補足プリント2

「3つの確率変数の独立」について

このプリントは補足プリント1とセットです。「事象の独立」と「確率変数の独立」は似て非なる概念なので，明確に区別して理解する必要があります。

3つの確率変数の独立について

3つの確率変数 X,Y,Z がとりうる値 a,b,c に対する，次の4つの関係式を考える。

$$P(X{=}a, Y{=}b) = P(X{=}a)\cdot P(Y{=}b) \quad \cdots ①$$
$$P(X{=}a, Z{=}c) = P(X{=}a)\cdot P(Z{=}c) \quad \cdots ②$$
$$P(Y{=}b, Z{=}c) = P(Y{=}b)\cdot P(Z{=}c) \quad \cdots ③$$
$$P(X{=}a, Y{=}b, Z{=}c) = P(X{=}a)\cdot P(Y{=}b)\cdot P(Z{=}c) \quad \cdots ㊟$$

- 任意の a,b に対して①が成り立つとき，
  「確率変数 X,Y は**（互いに）独立**である」という。
- 任意の a,c に対して②が成り立つとき，
  「確率変数 X,Z は**（互いに）独立**である」という。
- 任意の b,c に対して③が成り立つとき，
  「確率変数 Y,Z は**（互いに）独立**である」という。
- 任意の a,b,c に対して㊟が成り立つとき，
  「確率変数 X,Y,Z は**互いに独立**である」という。

【誤解其の三】 任意の a,b,c に対して①②③がすべて成り立つとき，任意の a,b,c に対して㊟も必ず成り立つ？ → **No!**

【誤解ではない】 任意の a,b,c に対して㊟が成り立つとき，任意の a,b,c に対して①②③も必ずすべて成り立つ？ → **Yes!**

【誤解其の三】の反例（①②③を満たすが㊟を満たさない例）

コイントスを 2 回行うとき，

- 1 回目が表（{ 表表, 表裏 }）ならば 1，そうでなければ 0 の値をとる確率変数 X
- 2 回目が表（{ 表表, 裏表 }）ならば 1，そうでなければ 0 の値をとる確率変数 Y
- 1 回目と 2 回目が同じ（{ 表表, 裏裏 }）ならば 1，そうでなければ 0 の値をとる確率変数 Z

とすると，

$$P(X{=}1) = P(X{=}0) = \frac{1}{2}, \qquad P(Y{=}1) = P(Y{=}0) = \frac{1}{2},$$
$$P(X{=}1, Y{=}1) = P(X{=}1, Y{=}0) = P(X{=}0, Y{=}1) = P(X{=}0, Y{=}0) = \frac{1}{4}$$

であるから，①式を満たしている。同様に②③式も満たしている。しかし，$P(X{=}1) = P(Y{=}1) = P(Z{=}1) = \dfrac{1}{2}$ であり，一方 $P(X{=}1, Y{=}1, Z{=}1) = \dfrac{1}{4}$ であるから，㊟式を満たしていない。

【誤解ではない】の証明（㊟が成り立つならば①②③もすべて成り立つことの証明）

Z を離散型確率変数とし，Z とりうる値を c_1，c_2，$\cdots$，c_N とすると，任意の a,b,c に対して㊟が成り立つことから，$k = 1,2,\cdots,N$ に対して

$$P(X{=}a, Y{=}b, Z{=}c_k) = P(X{=}a) \cdot P(Y{=}b) \cdot P(Z{=}c_k)$$

$k = 1,2,\cdots,N$ の式を辺々足して

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} P(X{=}a, Y{=}b, Z{=}c_k) &= \sum_{k=1}^{N} P(X{=}a) \cdot P(Y{=}b) \cdot P(Z{=}c_k) \\ &= P(X{=}a) \cdot P(Y{=}b) \cdot \sum_{k=1}^{N} P(Z{=}c_k) \\ &= P(X{=}a) \cdot P(Y{=}b) \cdot 1 = P(X{=}a) \cdot P(Y{=}b)\end{aligned}$$

よって $P(X{=}a, Y{=}b) = P(X{=}a) \cdot P(Y{=}b)$，すなわち，任意の a,b,c に対して㊟が成り立つならば任意の a,b,c に対して①も成り立つ。②，③も同様に証明できる。（証明終）

補足プリント3

「事象の独立」と「確率変数の独立」の関係

このプリントは補足プリント1・2を更に補うものです。

このプリントでは，事象 A,B,C に対応する確率変数をそれぞれ X,Y,Z とする。すなわち，

- 事象Aが起これば1，起こらなければ0の値をとる確率変数を X
- 事象Bが起これば1，起こらなければ0の値をとる確率変数を Y
- 事象Cが起これば1，起こらなければ0の値をとる確率変数を Z

とする。

「2つの事象の独立」と「確率変数の独立」の関係（定理）

次の [条件1] と [条件2]」は**同値である**。

[条件1]　$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

[条件2]　任意の $a,b \in \{1,0\}$ に対して，$P(X{=}a, Y{=}b) = P(X{=}a) \cdot P(Y{=}b))$

独立な事象 A,B の同時分布

	B	$\overline{B}$	計
A	P(A)P(B)	$P(A)P(\overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A})P(B)$	$P(\overline{A})P(\overline{B})$	$P(\overline{A})$
計	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

独立な確率変数 X,Y の同時分布

X ＼ Y	1	0	計
1	p_1q_1	p_1q_2	p_1
0	p_2q_1	p_2q_2	p_2
計	q_1	q_2	1

教科書には上記のことしか記載がないが，次の [条件1'] と [条件2'] は同値ではないので注意を要する。

「3つの事象の独立もどき」と「確率変数の独立」の関係

次の [条件1'] と [条件2'] は**同値ではない**。
（「[条件2'] ⇒ [条件1']」は真だが，「[条件1'] ⇒ [条件2']」は偽である。）

[条件1']　$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

[条件2']　任意の $a,b,c \in \{1,0\}$ に対して，$P(X{=}a, Y{=}b, Z{=}c) = P(X{=}a) \cdot P(Y{=}b) \cdot P(Z{=}c)$

※ [条件1'] だけでは，「3つの事象 A,B,C が互いに独立である」とは言えない。

なぜならば，3つの事象 A,B,C に対して，

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

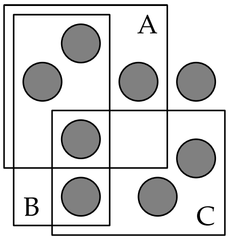
が成り立つからといって，必ずしも

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \qquad P(\overline{A} \cap B \cap C) = P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C}) \qquad P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C})$$
$$P(A \cap \overline{B} \cap C) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C) \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C})$$

がすべて成り立つとは限らないからである。

「[条件 1’] ⇒ [条件 2’]」の反例（[条件 1’] を満たすが [条件 2’]」を満たさない例）

次のような事象 A,B,C を考える。



$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} \qquad P(\overline{A} \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$$
$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = \frac{2}{8} \qquad P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) = 0$$
$$P(A \cap \overline{B} \cap C) = 0 \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = \frac{2}{8}$$
$$P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{1}{8} \qquad P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{1}{8}$$

$P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ なので，この事象 A,B,C は [条件 1’] を満たしている。
しかしながら，

$$P(X{=}1) = P(X{=}0) = \frac{1}{2}, \quad P(Y{=}1) = P(Y{=}0) = \frac{1}{2}, \quad P(Z{=}1) = P(Z{=}0) = \frac{1}{2}$$

であり，

$$\begin{aligned}
P(X{=}1, Y{=}1, Z{=}1) = \frac{1}{8} &\quad = \quad P(X{=}1) \cdot P(Y{=}1) \cdot P(Z{=}1) \\
P(X{=}1, Y{=}1, Z{=}0) = \frac{2}{8} &\quad \neq \quad P(X{=}1) \cdot P(Y{=}1) \cdot P(Z{=}0) \\
P(X{=}1, Y{=}0, Z{=}1) = 0 &\quad \neq \quad P(X{=}1) \cdot P(Y{=}0) \cdot P(Z{=}1) \\
P(X{=}1, Y{=}0, Z{=}0) = \frac{1}{8} &\quad = \quad P(X{=}1) \cdot P(Y{=}0) \cdot P(Z{=}0) \\
P(X{=}0, Y{=}1, Z{=}1) = \frac{1}{8} &\quad = \quad P(X{=}0) \cdot P(Y{=}1) \cdot P(Z{=}1) \\
P(X{=}0, Y{=}1, Z{=}0) = 0 &\quad \neq \quad P(X{=}0) \cdot P(Y{=}1) \cdot P(Z{=}0) \\
P(X{=}0, Y{=}0, Z{=}1) = \frac{2}{8} &\quad \neq \quad P(X{=}0) \cdot P(Y{=}0) \cdot P(Z{=}1) \\
P(X{=}0, Y{=}0, Z{=}0) = \frac{1}{8} &\quad = \quad P(X{=}0) \cdot P(Y{=}0) \cdot P(Z{=}0)
\end{aligned}$$

よって，この事象 A,B,C は [条件 2’] を満たしていない。